EXERCICE N°1 — 5 points — C2015 — Espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$.

1°) Justifier que (S) est de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon 5.

2°) Soit le point $J(-1,1,1)$ et soit (P) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM}=0$.

a) Justifier que (P) est le plan d'équation $2x-2y-z+5=0$.

b) Montrer que l'intersection (S) et (P) est le cercle (C) de centre J et de rayon4.

3°) Soit le point $A(-5,5,3)$ et (S') la sphère de centre A et rayon $2\sqrt{13}$.

a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).

b) Montrer que $AJ=6$.

4°) Soit M un point du cercle (C).

a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.

b) En déduire que $AM=2\sqrt{13}$.

c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan (P).

EXERCICE N°2 — 7 points — P2015 — Analyse

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.

2°) a) Montrer que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que (x^2-1) et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1+\infty[$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1+\infty[$.

d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$.

e) Dresser le tableau de variation de f .

3°) a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une unique tangente D parallèle à la droite Δ.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

Préciser les coordonnées du point *B*, point de contact de *C* et *D*.

b) Donner une équation de D.

4°) Dans la figure ci-contre, on a tracé relativement au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite Δ et la courbe (Γ) d'équation $y=\frac{\ln x}{x}$.

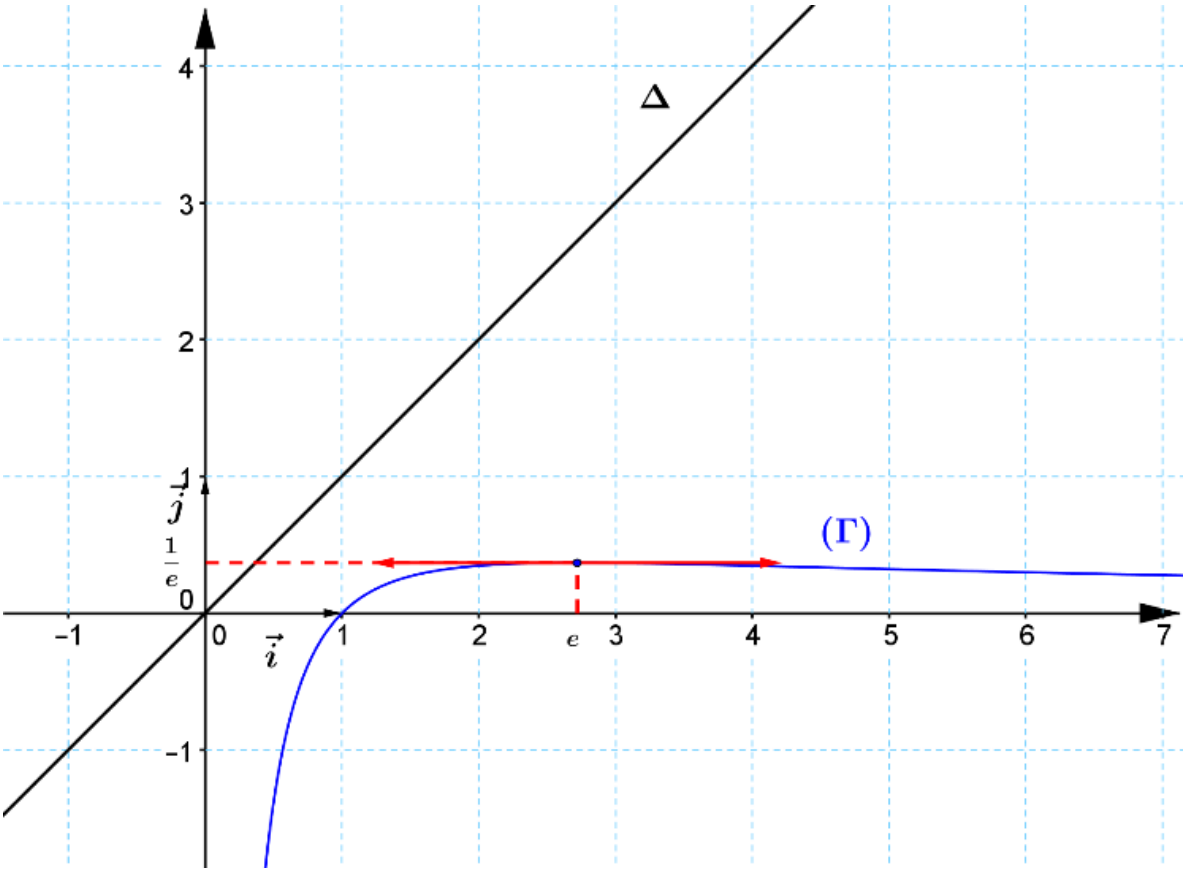
a) Soit le point $A(\frac{1}{e},0)$.

Placer le point *A* et vérifier que *A* appartient à D.

b) Tracer la droite D et placer le point B.

c) Tracer C_f .

5°) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations $x=\frac{1}{e}$ et x=e. Calculer $\mathcal{A}$.



Tous droits réservés © TakiAcademy.com